確率統計学 1　解答例

2019.01.30

■　$n \geq 3$ を自然数とする．正 n 角形の頂点の中から一つ頂点を選び，その頂点を O と表す．動点 P は初め頂点 O にいる．サイコロを投げ，1 の目が出た場合には反時計回りに 2 つ先の頂点に，1 以外の目が出た場合には反時計回りに 1 つ先の頂点に移動するという試行を繰り返し行う．次の問いに答えよ．

(1) 動点 P が正 n 角形を 1 周して，頂点 O に辿り着く確率を求めよ．

(2) 動点 P が正 n 角形を 2 周して，頂点 O に辿り着く確率を求めよ．

（解） 頂点 O を起点として，反時計回りに k 番目の頂点に辿り着く確率を p_k と表すと，求める確率は (1) については p_n，(2) については p_{2n} である．また，数列 $\{p_k\}$ は漸化式

$$p_0 = 1, \qquad p_1 = \frac{5}{6}, \qquad p_{k+2} = \frac{1}{6}\,p_k + \frac{5}{6}\,p_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

をみたす．

$$p_{k+2} + \frac{1}{6}\,p_{k+1} = p_{k+1} + \frac{1}{6}\,p_k, \qquad p_{k+2} - p_{k+1} = \left(-\frac{1}{6}\right)(p_{k+1} - p_k), \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

より

$$p_{k+1} + \frac{1}{6}\,p_k = p_1 + \frac{1}{6}\,p_0 = 1, \qquad p_{k+1} - p_k = \left(-\frac{1}{6}\right)^k (p_1 - p_0) = \left(-\frac{1}{6}\right)^{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

となり，

$$p_k = \frac{6}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{k+1}\right\}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

が得られる．したがって，

$$p_n = \frac{6}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right\}, \qquad p_{2n} = \frac{6}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{2n+1}\right\}$$

である．■