確率統計学１　解答例

2019.01.09

■　$0 < p < 1$ とし，確率変数 X が幾何分布

$$P(X = k) = \begin{cases} p^{k-1}\,(1-p) & (k \in \mathbb{N}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従うとき，期待値 $E[X]$ を求めよ．

（解） 等比数列の和の公式より

$$\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \left[x^k\right]' = \left[\sum_{k=1}^{n} x^k\right]' = \left[\frac{x\,(x^n - 1)}{x-1} x^k\right]' = \frac{1 - (1+n)\,x^n + n\,x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

が得られるので，

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p^{k-1}\,(1-p) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k\,p^{k-1}\,(1-p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+n)\,p^n + n\,p^{n+1}}{1-p}$$

と表せる．$q = p^{-1} - 1$ とおくと，$0 < p < 1$ より $q > 0$ であり，二項定理を用いると，$n \to \infty$ のとき

$$0 \le n\,p^n = \frac{n}{(1+q)^n} \le \frac{n}{{}_nC_2\,q^2} = \frac{2}{(n-1)\,q^2} \to 0$$

が得られ，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} n\,p^n = 0$$

となるので，

$$E[X] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+n)\,p^n + n\,p^{n+1}}{1-p} = \frac{1}{1-p}$$

である．■