確率統計学概論　解答例

2018.05.09

■　n を自然数，p を $0 < p < 1$ をみたす実数とするとき，次を簡単にせよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,{}_nC_k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$

（解）　二項係数 ${}_nC_k$ の定義より，$1 \leq k \leq n$ のとき

$$k \cdot {}_nC_k = k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot \{(n-1)-(k-1)\}!} = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

であるから，$2 \leq k \leq n$ のとき

$$k \cdot (k-1) \cdot {}_nC_k = n \cdot (k-1) \cdot {}_{n-1}C_{k-1} = n \cdot (n-1) \cdot {}_{n-2}C_{k-2}$$

となる．変数変換 $\ell = k-1$，$m = k-2$ と二項定理より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, p^k\,(1-p)^{n-k} =& \{p + (1-p)\}^n = 1, \\
\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\, p^k\,(1-p)^{n-k} =& \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}C_{k-1}\, p^k\,(1-p)^{n-k} = n\,p\,\sum_{\ell=0}^{n-1} n\,{}_{n-1}C_\ell\, p^\ell\,(1-p)^{(n-1)-\ell} \\
=& n\,p\,\{p + (1-p)\}^{n-1} = n\,p, \\
\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,{}_nC_k\, p^k\,(1-p)^{n-k} =& \sum_{k=2}^{n} n\,(n-1)\,{}_{n-2}C_{k-2}\, p^k\,(1-p)^{n-k} \\
=& n\,(n-1)\,p^2 \sum_{m=0}^{n-2} {}_{n-2}C_m\, p^m\,(1-p)^{(n-2)-m} \\
=& n\,(n-1)\,p^2\,\{p + (1-p)\}^{n-2} = n\,(n-1)\,p^2
\end{aligned}$$

が得られる．■