

■ 実数 (x, y) が $x \geq 0, y \geq 0$ をみたすとき, 関数

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x - y - 4$$

の最小値を求めよ.

(解) $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = \{(x + y)^2 - 2(x + y) + 1\} + y - 5 = \{x - (1 - y)\}^2 + y - 5$$

と表される.

(a) $y \geq 1$ のときを考える. $x = 1 - y \leq 0$ であるから, $f(x, y)$ は x に関する最小値を $x = 0$ で取り,

$$f(0, y) = y^2 - y - 4 = y(y - 1) - 4 \geq -4$$

は $y = 1$ で最小値 -4 を取る. したがって, 実数 (x, y) が $x \geq 0, y \geq 1$ をみたすとき, $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 1)$ で最小値 -4 を取る.

(b) $0 \leq y \leq 1$ のときを考える. $x = 1 - y \geq 0$ であるから, $f(x, y)$ は x に関する最小値を $x = 1 - y$ で取り,

$$f(1 - y, y) = y - 5 \geq -5$$

は $y = 0$ で最小値 -5 を取る. したがって, 実数 (x, y) が $x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$ をみたすとき, $f(x, y)$ は $(x, y) = (1, 0)$ で最小値 -5 を取る.

以上のことから, 実数 (x, y) が $x \geq 0, y \geq 0$ をみたすとき, $f(x, y)$ は $(x, y) = (1, 0)$ で最小値 -5 を取る. ■