確率統計学　解答例

2017.07.18

■　ある試験を受験した学生から無作為に選んだ 10 名の得点は

$$98,\quad 66,\quad 51,\quad 75,\quad 46,\quad 73,\quad 67,\quad 78,\quad 59,\quad 98$$

であり，得点の母集団分布は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うことが分かっているとする．このとき，(1) 母平均 μ が未知である場合，(2) 母平均 μ が $\mu = 65$ と分かっている場合それぞれについて，母分散 σ^2 に対する信頼係数 90% の信頼区間を求めよ．

(解)　正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本に対して，

$$\frac{n\,S^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2, \qquad \frac{(n-1)\,U^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

であることに注意したい．ここで，$\bar{X}$ は標本平均である．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} x_k =& 98 + 66 + 51 + 75 + 46 + 73 + 67 + 78 + 59 + 98 = 711, \\ \sum_{k=1}^{10} x_k^2 =& 98^2 + 66^2 + 51^2 + 75^2 + 46^2 + 73^2 + 67^2 + 78^2 + 59^2 + 98^2 = 53289\end{aligned}$$

より

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot 711 = 71.1, \qquad s^2 = \frac{1}{10} \cdot 53289 - 2 \cdot 65.0 \cdot 71.1 + (65.0)^2 = 310.9,$$
$$u^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \{53289 - 10 \cdot (71.1)^2\} = 304.1$$

が得られる．(1) $P(\chi_9^2 \geq 16.919) = 0.05$，$P(\chi_9^2 \geq 3.325) = 0.95$ より

$$3.325 \leq \frac{9 \cdot 304.1}{\sigma^2} \leq 16.919 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 161.8 \leq \mu \leq 823.1$$

となり，求める信頼区間は $[161.8, 823.1]$ である．(2) $P(\chi_{10}^2 \geq 18.307) = 0.05$，$P(\chi_{10}^2 \geq 3.940) = 0.95$ より

$$3.940 \leq \frac{10 \cdot 310.9}{\sigma^2} \leq 18.307 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 169.8 \leq \mu \leq 789.1$$

となり，求める信頼区間は $[169.8, 789.1]$ である．■