

## 確率統計学 解答例

2017.07.11

■ ある試験を受験した学生から無作為に選んだ 10 名の得点は

91, 43, 95, 100, 98, 41, 71, 61, 92, 55

であり、得点の母集団分布は正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うことが分かっているとす。このとき、(1) 母分散  $\sigma^2$  が未知である場合、(2) 母分散  $\sigma^2$  が  $\sigma^2 = 36$  と分かっている場合それぞれについて、母平均  $\mu$  に対する信頼係数 95% の信頼区間を求めよ。

**(解)** 正規母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  からの大きさ  $n$  の無作為標本に対して、

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1^2), \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{U^2}} \sim t_{n-1}$$

であることに注意したい。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{k=1}^n X_k^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

であることと、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} x_k &= 91 + 43 + 95 + 100 + 98 + 41 + 71 + 61 + 92 + 55 = 747, \\ \sum_{k=1}^{10} x_k^2 &= 91^2 + 43^2 + 95^2 + 100^2 + 98^2 + 41^2 + 71^2 + 61^2 + 92^2 + 55^2 = 60691 \end{aligned}$$

より

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot 747 = 74.7, \quad u^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \{60691 - 10 \cdot (74.7)^2\} \doteq 543.34$$

が得られる。(1)  $P(t_9 \geq 2.2622) = 0.025$  より

$$-2.2622 \leq \frac{\sqrt{10}(74.7 - \mu)}{\sqrt{543.34}} \leq 2.2622 \quad \iff \quad 58.0 \leq \mu \leq 91.4$$

となり、求める信頼区間は  $[58.0, 91.4]$  である。(2)  $P(Z \leq 1.96) = 0.975$  より

$$-1.96 \leq \frac{\sqrt{10}(74.7 - \mu)}{6} \leq 1.96 \quad \iff \quad 71.0 \leq \mu \leq 78.4$$

となり、求める信頼区間は  $[71.0, 78.4]$  である。 ■