

## 確率統計学 解答例

2017.06.06

■ 母集団の母平均  $\mu$  は未知であり,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  をこの母集団からの無作為標本とする. 推定量

$$\hat{\theta} = \sum_{k=1}^n w_k X_k$$

が  $E[\hat{\theta}] = \mu$  をみたし,  $V[\hat{\theta}]$  が最小になるように定数  $w_1, w_2, \dots, w_n$  を定めよ.

(解) 母集団の母分散を  $\sigma^2$  とする.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は無作為標本であるから,

$$E[\hat{\theta}] = E\left[\sum_{k=1}^n w_k X_k\right] = \sum_{k=1}^n w_k E[X_k] = \mu \sum_{k=1}^n w_k,$$
$$V[\hat{\theta}] = V\left[\sum_{k=1}^n w_k X_k\right] = \sum_{k=1}^n w_k^2 V[X_k] = \sigma^2 \sum_{k=1}^n w_k^2$$

と表せる.  $E[\hat{\theta}] = \mu$  より

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1$$

をみたす定数  $w_1, w_2, \dots, w_n$  に対して

$$R = \sum_{k=1}^n w_k^2$$

を最小にすればよい. 第 6 回課題により  $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1/n$  のとき, つまり,  $\hat{\theta}$  が標本平均

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

のとき  $R$  は最小になる. ■