

確率統計学 解答例

2017.05.02

■ 3人でジャンケンをして、勝者が1人になるまで繰り返す。ただし、ある回のジャンケンで負けた者は、それ以降の回のジャンケンには参加できないものとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) ちょうど1回のジャンケンで、勝者が1人になる確率を求めよ。

(2) n ($n \geq 2$) を自然数とすると、ちょうど n 回のジャンケンで、勝者が1人になる確率を求めよ。

(解) (1) 3人がジャンケンをした後、次のジャンケンに参加できる者が k ($k = 1, 2, 3$) 人である確率を p_k とする。求める確率は p_1 であることに注意したい。(a) 次のジャンケンに参加できる者が3人であるのは、3人とも同じ手、または、3人とも互いに異なる手を出す場合であるから、

$$p_3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

である。(b) 次のジャンケンに参加できる者が2人であるのは、2人が同じ手で、もう1人はその手に負ける手を出したときである。場合の数として、3人から2人を選び出す場合の数が ${}_3C_2$ 通りと、2人が出す手の場合の数が3通りであるから、

$$p_2 = {}_3C_2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

である。(c) 次のジャンケンに参加できる者が1人であるのは、(a) または (b) の余事象の確率であるから、

$$p_1 = 1 - p_3 - p_2 = \frac{1}{3}$$

である。したがって、求める確率は $1/3$ である。

(2) 求める確率は、(a) n 回目まですべてのジャンケンに参加できる者が3人である、または、(b) ジャンケンに参加できる者が k ($1 \leq k < n$) 回目までは3人、 $(k+1)$ 回目以降は2人である、という事象の確率である。また、2人がジャンケンをした後、次のジャンケンに参加できる者が k ($k = 1, 2$) 人である確率を q_k とすると、(1) と同様に $q_2 = 1/3$, $q_1 = 1 - q_2 = 2/3$ であるから、求める確率は

$$p_3^{n-1} \cdot p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{p_3^{k-1} \cdot p_2 \cdot q_2^{n-k-1} \cdot q_1\} = \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3^n} = \frac{2n-1}{3^n}$$

である。 ■