確率統計学　解答例

2017.04.25

■ $(a, b) \neq (0, 0)$ とするとき，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と直線 $\ell : a\,x + b\,y + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|\,a\,x_0 + b\,y_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

と表せることを示せ．

(解) 点 P から直線 ℓ に下ろした垂線を PH とすると，求める距離 d は線分 PH の長さである．ここで，点 H の座標を (u, v) とすると，線分 PH はベクトル (a, b) に平行であるから，ある t が取れて

$$(u, v) = (x_0, y_0) + t\,(a, b), \qquad \text{つまり，}\quad u = x_0 + a\,t,\ v = y_0 + b\,t$$

となり，点 H は直線 ℓ 上の点であるから

$$0 = a\,u + b\,v + c = a\,(x_0 + a\,t) + b\,(y_0 + b\,t) + c = (a^2 + b^2)\,t + (a\,x_0 + b\,y_0 + c)$$

が得られ，t は

$$t = -\frac{a\,x_0 + b\,y_0 + c}{a^2 + b^2}$$

でなければならない．したがって，距離 d は

$$d = \sqrt{(u - x_0)^2 + (v - y_0)^2} = \sqrt{a^2\,t^2 + b^2\,t^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\,|\,t\,| = \frac{|\,a\,x_0 + b\,y_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる．■