確率統計学　解答例

2017.04.11

■　確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n は互いに独立で，期待値 μ，分散 σ^2 の同一の確率分布に従うものとし，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2, \qquad U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$$

とおく．このとき，期待値 $E[X]$，$E[S^2]$ および $E[U^2]$ を求めよ．

(解)　独立性より

$$Cov[X_k, X_\ell] = E[(X_k-\mu)\,(X_\ell-\mu)] = \begin{cases} 0 & (k \neq \ell) \\ V[X_k] = \sigma^2 & (k = \ell) \end{cases}$$

であることに注意したい．期待値の線形性により

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k] = \frac{1}{n}\cdot(n\,\mu) = \mu$$

となる．また，

$$\bar{X} - \mu = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell - \mu)$$

より

$$\begin{aligned} E[(X_k-\mu)\,(\bar{X}-\mu)] =& \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} E[(X_k-\mu)\,(X_\ell-\mu)] \\ =& \frac{1}{n}\left\{V[X_k] + \sum_{\ell\neq k} Cov[X_k, X_\ell]\right\} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \\ E[(\bar{X}-\mu)^2] =& \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} E[(X_k-\mu)\,(X_\ell-\mu)] \\ =& \left\{\sum_{k=1}^{n} V[X_k] + \sum_{k\neq\ell} Cov[X_k, X_\ell]\right\} = \frac{1}{n^2}\,(n\,\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} E[U^2] =& \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} E[\{(X_k-\mu) - (\bar{X}-\mu)\}^2] \\ =& \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{E[(X_k-\mu)^2] - 2\,E[(X_k-\mu)\,(\bar{X}-\mu)] + E[(\bar{X}-\mu)^2]\right\} \\ =& \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma^2 - 2\cdot\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

が得られる．■