確率統計学概論　解答例

2017.05.15

■　自然数 n を予め定め，コイン投げを始める前に，駒を数直線上の原点におき，コインを n 回投げる．コインを投げる度に，表が出ると数直線上 1 だけ右に，裏が出ると 1 だけ左に駒を移動させる．コインを n 回投げ，駒の移動が終了した時点で，駒が (1) 点 1 にある確率，(2) 点 2 にある確率，(3) 点 k $(-n \le k \le n)$ にある確率を求めよ．

(解) 駒が点 k $(-n \le k \le n)$ にある確率を p_k とすると，(1) の確率は p_1，(2) の確率は p_2 である．コインを投げた n 回のうち，表が出た回数を i，裏が出た回数を j とすると，

$$n = i + j, \quad k = i - j \qquad \Longleftrightarrow \qquad i = \frac{n+k}{2}, \quad j = \frac{n-k}{2}$$

であるから，$(n+k)$ は $0 \le n+k \le 2n$ をみたす偶数でなければならない．したがって，

$$p_k = \begin{cases} {}_nC_{(n+k)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-k}{2}} = \frac{{}_nC_{(n+k)/2}}{2^n} & ((n+k) \text{ は } 0 \le n+k \le 2n \text{ をみたす偶数}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である．■