確率統計学概論　解答例

2017.05.08

■　$0 < p < 1$ とし，n を $n \geq 3$ をみたす自然数とする．正 n 角形の頂点の中から起点 O を定め，最初の時点での動点 P は起点 O の上にある．動点 P は正 n 角形の頂点を反時計回りに，毎回，確率 p で頂点を 1 つ，確率 $(1-p)$ で頂点を 2 つ進む．動点 P が何回か移動して正 n 角形の頂点を 1 周してきたとき，動点 P が起点 O を飛び越える確率を求めよ．

(解)　p_k を起点から数えて k 番目の点を飛び越える確率とする．$(k+1)$ 番目の点を飛び越えるためには，k 番目の点の上にあり，確率 $(1-p)$ で頂点を 2 つ進まなければならないので，関係式

$$p_0 = 0; \qquad p_{k+1} = (1-p)\,(1-p_k), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

が得られる．

$$\begin{aligned} p_k - \frac{1-p}{2-p} =& (1-p)\,(1-p_{k-1}) - \frac{1-p}{2-p} \\ =& (p-1)\,\left(p_{k-1} - \frac{1-p}{2-p}\right) = (p-1)^k\,\left(p_0 - \frac{1-p}{2-p}\right) = \frac{(p-1)^{k+1}}{2-p} \end{aligned}$$

より

$$p_k = \frac{1-p}{2-p}\,\left\{1 - (p-1)^k\right\}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

となり，求める確率は p_n である．■