確率統計学概論　解答例

2017.05.01

■　3 人でジャンケンをして，勝者が 1 人になるまで繰り返す．ただし，ある回のジャンケンで負けた者は，それ以降の回のジャンケンには参加できないものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ちょうど 1 回のジャンケンで，勝者が 1 人になる確率を求めよ．

(2) n （$n \geq 2$）を自然数とするとき，ちょうど n 回のジャンケンで，勝者が 1 人になる確率を求めよ．

（解） (1) 3 人がジャンケンをした後，次のジャンケンに参加できる者が k （$k = 1$，2，3）人である確率を p_k とする．求める確率は p_1 であることに注意したい．(a) 次のジャンケンに参加できる者が 3 人であるのは，3 人とも同じ手，または，3 人とも互いに異なる手を出す場合であるから，

$$p_3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

である．(b) 次のジャンケンに参加できる者が 2 人であるのは，2 人が同じ手で，もう 1 人はその手に負ける手を出したときである．場合の数として，3 人から 2 人を選び出す場合の数が ${}_3C_2$ 通りと，2 人が出す手の場合の数が 3 通りであるから，

$$p_2 = {}_3C_2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

である．(c) 次のジャンケンに参加できる者が 1 人であるのは，(a) または (b) の余事象の確率であるから，

$$p_1 = 1 - p_3 - p_2 = \frac{1}{3}$$

である．したがって，求める確率は 1/3 である．

(2) 求める確率は，(a) n 回目まですべてのジャンケンに参加できる者が 3 人である，または，(b) ジャンケンに参加できる者が k （$1 \leq k < n$）回目までは 3 人，$(k+1)$ 回目以降は 2 人である，という事象の確率である．また，2 人がジャンケンをした後，次のジャンケンに参加できる者が k （$k = 1$，2）人である確率を q_k とすると，(1) と同様に $q_2 = 1/3$，$q_1 = 1 - q_2 = 2/3$ であるから，求める確率は

$$p_3^{n-1} \cdot p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ p_3^{k-1} \cdot p_2 \cdot q_2^{n-k-1} \cdot q_1 \right\} = \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3^n} = \frac{2\,n-1}{3^n}$$

である．■