確率統計学概論　解答例

2017.04.24

■　二項係数 ${}_nC_m$ について次の関係式が成り立つことを示せ．

(1) ${}_{n+1}C_{m+1} = {}_nC_m + {}_nC_{m+1} \qquad (0 \leq m < n)$

(2) ${}_mC_m + {}_{m+1}C_m + \cdots + {}_nC_m = {}_{n+1}C_{m+1} \qquad (0 \leq m \leq n)$

（解） (1) 二項係数の定義より

$$
\begin{aligned}
{}_nC_m + {}_nC_{m+1} =& \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} = \frac{(m+1)\,n!}{(m+1)!\,(n-m)!} + \frac{(n-m)\,n!}{(m+1)!\,(n-m)!} \\
=& \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,\{(n+1)-(m+1)\}!} = {}_{n+1}C_{m+1}
\end{aligned}
$$

となる．

(2) すべての n に対して ${}_nC_n = 1$ であることに注意して，(1) を帰納的に用いると

$$
\begin{aligned}
{}_{n+1}C_{m+1} =& {}_nC_{m+1} + {}_nC_m = ({}_{n-1}C_{m+1} + {}_{n-1}C_m) + {}_nC_m \\
=& ({}_{n-2}C_{m+1} + {}_{n-2}C_m) + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m = \cdots \\
=& {}_{m+1}C_{m+1} + {}_{m+1}C_m + \cdots + {}_{n-2}C_m + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m \\
=& {}_mC_m + {}_{m+1}C_m + \cdots + {}_{n-2}C_m + {}_{n-1}C_m + {}_nC_m
\end{aligned}
$$

である．■