確率統計学概論　解答例

2017.04.17

■　データ (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_n, y_n) に対して

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)$$

が成り立つことを示せ．

(解)　与えられたデータを用いて，n 次元ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ を定義する．

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j, \qquad |\,\mathbf{x}\,|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \qquad |\,\mathbf{y}\,|^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

より，任意の n 次元ベクトル $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ に対して

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \leq |\,\mathbf{x}\,|^2\,|\,\mathbf{y}\,|^2 \tag{E}$$

が成り立つことを示せば良い．すべての実数 t に対して

$$0 \leq |\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}\,|^2 = (\mathbf{x} + t\,\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\,t\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + t^2\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = |\,\mathbf{x}\,|^2 + 2\,t\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + t^2\,|\,\mathbf{y}\,|^2$$

が成り立つので，$|\,\mathbf{y}\,| > 0$ のときには

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 - |\,\mathbf{x}\,|^2\,|\,\mathbf{y}\,|^2 \leq 0$$

でなければならない，つまり，関係式 (E) が成り立つ．また，$|\,\mathbf{y}\,| = 0$ のときには，すべての j に対して $y_j = 0$ である，つまり，$\mathbf{y} = \mathbf{0}$ であるから，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ より (E) の左辺，右辺共に 0 となるので，不等式 (E) は成り立つ．以上から，任意の n 次元ベクトル $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ に対して不等式 (E) が成り立つ．■