確率統計学　解答例

2016.05.11

■　n を $n \geq 3$ をみたす自然数とする．正 n 角形の頂点の中から起点 Q を定め，動点 P は次の規則に従って正 n 角形の頂点を反時計回りに移動していく．

(a)　最初の時点での動点 P は起点 Q の上にある．

(b)　コインを投げて，表が出たときには頂点を 2 つ進み，裏が出たときには頂点を 1 つ進む．

このとき，次の確率を求めよ．

(1)　1 周したとき，動点 P が起点 Q を飛び越える確率

(2)　1 周目は動点 P が起点 Q を飛び越え，2 周目は動点 P が起点 Q の上にある確率

(解)　起点から移動した頂点の数を k とする．このとき，$k \equiv 0 \mod n$ のときには動点 P は起点 Q の上にあることに注意したい．p_k を起点から数えて k 番目の点を飛び越える確率とする．$(k+1)$ 番目の点を飛び越えるためには，k 番目の点の上にあり，表が出なければならないので，関係式

$$p_0 = 0; \qquad p_{k+1} = (1 - p_k) \cdot \frac{1}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

が得られる．

$$p_k - \frac{1}{3} = (1 - p_{k-1}) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_{k-1} - \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(p_0 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

より

$$p_k = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

となり，(1) で求める確率は p_n である．(2) で求める確率は，1 周したとき起点 Q を飛び越えて $(n+1)$ 番目の点の上にあり，その点を起点とすると，$(n-1)$ 番目の点の上にあれば良いので，求める確率は

$$p_n (1 - p_{n-1}) = \left[\frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right]\left[\frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right] = \frac{2}{9}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2$$

である．■