

■ 領域 D を

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y+4}{2} \right\}$$

とすると、重積分

$$\iint_D x e^y dx dy$$

を求めよ。

(解) 変数変換

$$u = x - \frac{y}{2}, \quad v = y \quad \iff \quad x = u + \frac{v}{2}, \quad y = v$$

を用いると、領域 D は

$$\hat{D} = \{ (u, v) \mid 0 \leq v \leq 2, 0 \leq u \leq 2 \}$$

に移され、

$$dx dy = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| du dv = du dv$$

より

$$\begin{aligned} \iint_D x e^y dx dy &= \iint_{\hat{D}} \left(u + \frac{v}{2}\right) e^v du dv = \int_0^2 \int_0^2 \left(u + \frac{v}{2}\right) e^v du dv \\ &= \int_0^2 e^v \left\{ \int_0^2 \left(u + \frac{v}{2}\right) du \right\} dv = \int_0^2 e^v (v+2) dv \\ &= [e^v \cdot (v+2)]_0^2 - \int_0^2 e^v \cdot 1 dv = 3e^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。 ■