

## 確率統計学 解答例

2016.04.20

■ 領域  $D$  を  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  とするとき, 重積分

$$2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

を求めよ.

(解) 極座標への変数変換  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  を用いると,  $dx \, dy = r \, dr \, d\theta$  であるから,

$$\begin{aligned} 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} \, r \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ -\frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]' \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1 \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \, d\theta = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

である. ■