# 確率統計学　解答例

2016.04.13

■　一様分布 $U(a,b)$ および正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めよ．

**（解）** (1) 一様分布 $U(a,b)$ の確率密度関数 $f(x)$ は $a<x<b$ の範囲では $f(x)=1/(b-a)$ であり，その他の $x$ では $f(x)=0$ であるから，

$$E[X]=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)}=\frac{a+b}{2},$$
$$V[X]=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{3\,(b-a)}\ \left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b=\frac{(b-a)^2}{12}$$

となる．(2) 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

であり，

$$f'(x)=-\frac{x-\mu}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}=-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\,f(x),\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}E[X]&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{(x-\mu)+\mu\}\cdot f(x)\,dx\\&=-\,\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\,dx+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=-\sigma^2\ [f(x)]_{-\infty}^{+\infty}+\mu\cdot1=\mu,\\V[X]&=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\,dx=-\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)\cdot f'(x)\,dx\\&=-\,\sigma^2\left\{[(x-\mu)\cdot f(x)]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot f(x)\,dx\right\}=\sigma^2\end{aligned}$$

が得られる．■