確率統計学概論　解答例

2017.02.06

■ 確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n は互いに独立で，期待値 μ，分散 σ^2 の同一の確率分布に従うものとし，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

とおく．このとき，期待値 $E[X]$ および $E[U^2]$ を求めよ．

(解) 独立性より

$$E[X_k\,X_\ell] = \begin{cases} E[X_k]\,E[X_\ell] = \mu^2 & (k \neq \ell) \\ V[X_k] + \{E[X_k]\}^2 = \sigma^2 + \mu^2 & (k = \ell) \end{cases}$$

であることに注意したい．期待値の線形性により

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k] = \frac{1}{n}\cdot(n\,\mu) = \mu$$

となる．

$$\begin{aligned} E[X_k\,\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} E[X_k\,X_\ell] &= \frac{1}{n}\left\{E[X_k^2] + \sum_{\ell\neq k} E[X_k\,X_\ell]\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left\{(\sigma^2+\mu^2) + (n-1)\,\mu^2\right\} = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2, \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \\ E[\bar{X}^2] = \frac{1}{n^2}\,E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] + \sum_{k\neq\ell} E[X_k\,X_\ell]\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{n\,(\sigma^2+\mu^2) + n\,(n-1)\,\mu^2\right\} = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} E[U^2] &= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} E[(X_k - \bar{X})^2] = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] - 2\sum_{k=1}^{n} E[X_k\,\bar{X}] + \sum_{k=1}^{n} E[\bar{X}^2]\right\} \\ &= \frac{1}{n-1}\left\{n\,(\sigma^2+\mu^2) - 2\,n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) + n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right\} = \sigma^2 \end{aligned}$$

が得られる．■