確率統計学概論　解答例

2016.12.12

■　$n \geq 4$ を自然数とする．n 個のビーカー B_1，B_2，B_3，$\cdots$，B_n があり，それらにはそれぞれ x_1 L，x_2 L，x_3 L，$\cdots$，x_n L の水が入っており，条件

$$x_1 > x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n > 0, \qquad x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1$$

をみたしているとする．これらのビーカーに対して，次の操作をビーカーが 1 個になるまで繰り返す．

(M) 最も水の量が少ないビーカー 2 個を選び，一方の水全部を他方に移し，空になったビーカーを捨てる．

このとき，$x_1 > 2/5$ の場合について，ビーカーが 2 個になったとき，ビーカー B_1 はどのようになっているかを調べよ．

(解)　k　($k \geq 3$) 個になったとき初めて，水の量が x_1 L 以上のビーカーが現れたとする．直前の $(k+1)$ 個のとき，捨てられずに残っているビーカーの水の量を x_1 L，y_1 L，y_2 L，$\cdots$，y_k L とすると，

$$y_{k-1} + y_k \geq x_1 > y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_k > 0, \qquad 1 = x_1 + \sum_{\ell=1}^{k} y_\ell = x_1 + \sum_{\ell=1}^{k-2} y_\ell + y_{k-1} + y_k$$

が成り立つ．$k - 1 \geq 2 > 1$ より

$$\frac{2}{5} < x_1 \leq y_{k-1} + y_k \leq 2\,y_{k-1}, \qquad \text{つまり，} \quad \frac{1}{5} < y_{k-1} \leq y_{k-2} \leq \cdots \leq y_1$$

であるから，

$$\frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} > 1 - x_1 - (y_{k-1} + y_k) = \sum_{\ell=1}^{k-2} y_\ell \geq y_1 > \frac{1}{5}$$

となり矛盾である．したがって，k　($k \geq 3$) 個のときにはビーカー B_1 の水の量は x_1 L のままで，その量は他のビーカーの水の量より多い，つまり，ビーカーが 3 個になったとき，水の量 x_1 L，u_1 L，u_2 L は $x_1 > u_1 \geq u_2 > 0$ をみたす．さらに操作を行い，ビーカーが 2 個になったとき，ビーカー B_1 は残っており，その水の量は変化していない．■