確率統計学概論　解答例

2016.12.05

■　$\sigma > 0$，$\mu \in \mathbb{R}$ とする．広義積分

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r\, e^{-r^2/2}\, dr\, d\theta, \qquad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\,x} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

を求めよ．

(解)　$[-e^{-r^2/2}]' = r\, e^{-r^2/2}$ より

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} [-e^{-r^2/2}]'\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} [-e^{-r^2/2}]_0^{+\infty}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$$

となる．

$$t\,x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{\{x-(\mu+\sigma^2 t)\}^2}{2\sigma^2} + \frac{t\,(2\mu+\sigma^2 t)}{2}$$

と表されるので，変数変換

$$y = \frac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma}$$

を用いると，

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} \cdot e^{t\,(2\mu+\sigma^2 t)/2} \cdot \sigma\, dy = e^{t\,(2\mu+\sigma^2 t)/2}$$

である．■