確率統計学概論　解答例

2016.11.28

■　ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad z > 0$$

は，(1) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，(2) $\Gamma(1) = 1$，(3) すべての $z > 0$ に対して $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ が成り立つことを示せ．ただし，必要があれば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\,\pi}$$

を用いてもよい．

（解） (1) 変数変換 $t = s^2/2$ （$s \geq 0$）を用いると，$\sqrt{t} = s/\sqrt{2}$，$dt = s\, ds$ より

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-s^2/2}\, ds = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

となる．(2)

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

である．(3) すべての $x \geq 0$ に対して $e^x \geq x$ が成り立つので，はさみうちの原理と

$$0 \leq t^z\, e^{-t} = (2\,z)^z \cdot \left\{\frac{t/(2\,z)}{e^{t/(2\,z)}}\right\}^z \cdot e^{-t/2} \leq (2\,z)^z \cdot e^{-t/2}$$

より

$$\lim_{t \to +\infty}\left(t^z\, e^{-t}\right) = 0$$

が得られる．部分積分法により

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z\, \left[-e^{-t}\right]'\, dt = \left[t^z\, \left(-e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} z\, t^{z-1}\left(-e^{-t}\right) dt = z\,\Gamma(z)$$

となる．■