確率統計学概論　解答例

2016.11.14

■　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+1)/2)}{n\,\Gamma(n/2)}$$

と表されることを示せ．ここで，$\Gamma(z)$ はガンマ関数であり，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，$\Gamma(1) = 1$，すべての $z > 0$ に対して $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ がみたされることに注意したい．

(解)　I_n の定義より，

$$I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1, \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

であり，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
I_{n+2} =& \int_0^{\pi/2} [-\cos x]' \cdot \sin^{n+1} x \, dx = -\int_0^{\pi/2} (-\cos x) \cdot \{(n+1)\, \sin^n x\, \cos x\}\, dx \\
=&(n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,(1 - \sin^2 x)\, dx = (n+1)\, I_n - (n+1)\, I_{n+2}, \qquad \text{つまり，}\quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n
\end{aligned}$$

となる．また，すべての $z > 0$ に対して $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ であるから，

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \qquad \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n+3)/2)} = \frac{n\,\Gamma(n/2)}{(n+1)\,\Gamma((n+1)/2)}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が得られることに注意したい．

$$J_n = \frac{n\,\Gamma(n/2)\, I_n}{\Gamma((n+1)/2)}$$

とおくと，

$$J_1 = \frac{1 \cdot \Gamma(1/2) \cdot I_1}{\Gamma(1)} = \sqrt{\pi}, \qquad J_2 = \frac{2 \cdot \Gamma(1) \cdot I_2}{\Gamma(3/2)} = \sqrt{\pi}$$

であるから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
J_{n+2} =&(n+2)\, \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n+3)/2)}\, I_{n+2} = (n+2)\, \frac{n\,\Gamma(n/2)}{(n+1)\,\Gamma((n+1)/2)}\, \frac{n+1}{n+2}\, I_n \\
=&\frac{n\,\Gamma(n/2)\, I_n}{\Gamma((n+1)/2)} = J_n = J_{n-2} = \cdots = \begin{cases} J_1 = \sqrt{\pi} & (n : \text{奇数}) \\ J_2 = \sqrt{\pi} & (n : \text{偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+1)/2)}{n\,\Gamma(n/2)}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

と表される．■