確率統計学概論　解答例

2016.11.07

■　n を 0 以上の整数とする．点 P，Q は正四面体 ABCD の頂点の上を，以下の条件 (a)，(b) をみたしながら移動する．

(a) 時刻 $t=0$ において，点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 B にいる．

(b) 時刻 $t=n+1$ において，点 P と点 Q は各々，時刻 $t=n$ のときいた頂点から，他の 3 つの頂点の何れかに，それぞれ 1/3 の確率で移動する．

時刻 $t=n$ （$n \in \mathbb{N}$）において，点 P と点 Q がいる頂点をそれぞれ P_n および Q_n とするとき，$\mathrm{P}_n = \mathrm{Q}_n$ である確率を求めよ．

(解) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{P}_n = \mathrm{Q}_n$ である確率を p_n，$\mathrm{P}_n \neq \mathrm{Q}_n$ である確率を q_n とする．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$p_n + q_n = 1$ が成り立つ．(1) $t=1$ のとき，点 P と点 Q がともに頂点 C および頂点 D に移動する確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

であるから，p_1 は

$$p_1 = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

となる．(2) $t = n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{P}_n \neq \mathrm{Q}_n$ の状態から $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{Q}_{n+1}$ の状態に遷移する確率は p_1 と同様に 2/9 であり，$\mathrm{P}_n = \mathrm{Q}_n$ の状態から $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{Q}_{n+1}$ の状態に遷移する確率は

$$3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

であるから，

$$p_{n+1} = \frac{2}{9}\,q_n + \frac{1}{3}\,p_n = \frac{2}{9}\,(1-p_n) + \frac{1}{3}\,p_n = \frac{1}{9}\,p_n + \frac{2}{9}$$

と表せる．

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\,p_n + \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\left(p_n - \frac{1}{4}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

より

$$p_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9^n}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

となる．■