確率統計学概論　解答例

2016.10.31

■　$N \geq 3$ を自然数とする．N 本のクジに当たりクジが ℓ （$1 \leq \ell \leq N$）本含まれており，引いたクジは元に戻さないとき，k （$1 \leq k \leq N$）番目の人が当たりクジを引く確率を $p_k^{(\ell)}$ とする．各 k （$1 \leq k \leq N$）に対して $p_k^{(1)}$ および $p_k^{(2)}$ を求めよ．

(解) n 個から k 個取り出し，並べかえる場合の数 ${}_nP_k$ は

$$
{}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad {}_nP_\ell \cdot {}_{n-\ell}P_k = {}_nP_{\ell+k} \quad (1 \leq \ell + k \leq n)
$$

をみたすことに注意したい．

$\ell = 1$： k 番目の人が当たりクジを引くためには，1 番目から $(k-1)$ 番目の人は，はずれクジを引かなければならないので，

$$
p_k^{(1)} = \frac{{}_{N-1}P_{k-1}}{{}_NP_{k-1}} \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_{N-(k-1)}P_1} = \frac{{}_{N-1}P_{k-1}}{{}_NP_k} = \frac{1}{N}
$$

である．

$\ell = 2$： k 番目の人が当たりクジを引くためには，当たりクジが (1) 1 本，または，(2) 2 本残っていなければならない．(1) 1 番目の人がクジを引く際には当たりクジが 2 本残っているので，$2 \leq k \leq N$ である．1 番目から $(k-1)$ 番目の人のうち，ℓ （$1 \leq \ell < k$）番目の人が当たりクジを引き，その他がはずれクジを引く場合には

$$
\frac{{}_{N-2}P_{\ell-1}}{{}_NP_{\ell-1}} \cdot \frac{{}_2P_1}{{}_{N-(\ell-1)}P_1} \cdot \frac{{}_{N-2-(\ell-1)}P_{k-1-\ell}}{{}_{N-\ell}P_{k-1-\ell}} \cdot \frac{{}_1P_1}{{}_{N-(k-1)}P_1} = \frac{2 \cdot {}_{N-2}P_{k-2}}{{}_NP_k} = \frac{2}{N\,(N-1)}
$$

となるので，この場合の確率は

$$
\frac{2\,(k-1)}{N\,(N-1)}
$$

である．$k = 1$ のときには確率が 0 であるから，$k = 1$ のときも確率を上式のように書いて良い．(2) N 番目の人がクジを引く際には当たりクジは高々 1 本であるから，$1 \leq k < N$ である．1 番目から $(k-1)$ 番目の人すべてがはずれクジを引かなければなならないので，この場合の確率は

$$
\frac{{}_{N-2}P_{k-1}}{{}_NP_{k-1}} \cdot \frac{{}_2P_1}{{}_{N-(k-1)}P_1} = \frac{2 \cdot {}_{N-2}P_{k-1}}{{}_NP_k} = \frac{2\,(N-k)}{N\,(N-1)}
$$

である．$k = N$ のときには確率が 0 であるから，$k = N$ のときも確率を上式のように書いて良い．以上から，求める確率は

$$
p_k^{(2)} = \frac{2\,(k-1)}{N\,(N-1)} + \frac{2\,(N-k)}{N\,(N-1)} = \frac{2}{N}
$$

である．■