確率統計学概論　解答例

2016.10.24

■　赤色と青色のオハジキがたくさんあり，それらの中から n 個取り出して横一列に並べる．赤色のオハジキが連続しないような並べ方は何通りあるか調べよ．

(解)　n 個のオハジキを横一列に並べたとき，左端が赤色［青色］であり，赤色のオハジキが連続しないような並べ方の場合の数を R_n ［B_n］とする．$(n+1)$ 個のオハジキの並べ方について，左端が青色のオハジキの場合には，その隣は赤色または青色のオハジキであり，左端が赤色のオハジキの場合には，その隣は青色のオハジキであるから，$R_1 = 1$，$B_1 = 1$ であり，漸化式

$$R_{n+1} = B_n, \qquad B_{n+1} = R_n + B_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立つ．数列 $\{ B_n \}$ は

$$B_1 = 1, \qquad B_2 = 2; \qquad B_{n+2} = B_n + B_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたすので，特性方程式 $\lambda^2 = 1 + \lambda$ の解

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

を用いると，

$$\lambda_{\pm}^2 = 1 + \lambda_{\pm}, \qquad \lambda_- + \lambda_+ = 1, \qquad \lambda_- \, \lambda_+ = -1$$

より

$$\begin{aligned} B_{n+1} - \lambda_{\pm} B_n &= - \lambda_- \lambda_+ B_{n-1} + (\lambda_- + \lambda_+) B_n - \lambda_{\pm} B_n \\ &= \lambda_{\mp} (B_n - \lambda_{\pm} B_{n-1}) = \lambda_{\mp}^2 (B_{n-1} - \lambda_{\pm} B_{n-2}) = \cdots \\ &= \lambda_{\mp}^{n-1} (B_2 - \lambda_{\pm} B_1) = \lambda_{\mp}^{n-1} (2 - \lambda_{\pm}) = \lambda_{\mp}^{n+1} \end{aligned}$$

が得られ，

$$\sqrt{5}\, B_n = (\lambda_+ - \lambda_-)\, B_n = (B_{n+1} - \lambda_- B_n) - (B_{n+1} - \lambda_+ B_n) = \lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}$$

より

$$B_n = \frac{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

となる．求める場合の数は $R_n + B_n$ であるから，

$$\begin{aligned} R_n + B_n &= B_{n-1} + B_n = \frac{(\lambda_+^n - \lambda_-^n) + (\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\lambda_+^n (1 + \lambda_+) - \lambda_-^n (1 + \lambda_-)}{\sqrt{5}} = \frac{\lambda_+^{n+2} - \lambda_-^{n+2}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

が得られる．■