確率統計学概論　解答例

2016.10.17

■　$n \in \mathbb{N}$，$n \geq 2$，$0 < p < 1$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $k\,{}_nC_k = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$　$(1 \leq k \leq n)$ であることを示せ．

(2) $\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$ を簡単にせよ．

(3) $\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$ を簡単にせよ．

(解) (1)： $n! = n \cdot (n-1)!$ より

$$k\,{}_nC_k = k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\{(n-1)-(k-1)\}!} = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$$

となる．

(2)： 変数変換 $\ell = k-1$ と二項定理により

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}C_{k-1}\,p^k\,(1-p)^{n-k} \\ &= n\,p \sum_{\ell=0}^{n-1} {}_{n-1}C_\ell\,p^\ell\,(1-p)^{(n-1)-\ell} = n\,p\,\{p+(1-p)\}^{n-1} = n\,p\end{aligned}$$

である．

(3)： 変数変換 $\ell = k-2$ と二項定理により

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,{}_nC_k\,p^k\,(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\,(n-1)\,{}_{n-2}C_{k-2}\,p^k\,(1-p)^{n-k} = n\,(n-1)\,p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} {}_{n-2}C_\ell\,p^\ell\,(1-p)^{(n-2)-\ell} \\ &= n\,(n-1)\,p^2\,\{p+(1-p)\}^{n-2} = n\,(n-1)\,p^2\end{aligned}$$

である．■