確率統計学　解答例

2015.07.07

■　自然数 n，m に対して，定積分

$$I_{n,m} = \int_0^\pi \sin n\,x\ \sin m\,x\,dx$$

を求めよ．

(解)　三角関数の積和公式より

$$\sin n\,x\ \sin m\,x = -\frac{1}{2}\ [\cos\{(n+m)\,x\} - \cos\{(n-m)\,x\}]$$

となり，任意の整数 $\ell \neq 0$ に対して

$$\int_0^\pi \cos\ell\,x\,dx = \left[\frac{\sin\ell\,x}{\ell}\right]_0^\pi = 0$$

であるから，(i) $n \neq m$ のとき

$$I_{n,m} = -\frac{1}{2}\ \left[\int_0^\pi \cos\{(n+m)\,x\}\,dx - \int_0^\pi \cos\{(n-m)\,x\}\,dx\right] = 0$$

であり，(ii) $n = m$ のとき

$$I_{n,m} = -\frac{1}{2}\ \left[\int_0^\pi \cos\{(n+m)\,x\}\,dx - \int_0^\pi 1\,dx\right] = \frac{\pi}{2}$$

である．■