確率統計学　解答例

2015.06.30

■　確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n は互いに独立で，期待値 μ，分散 σ^2 の同一の分布に従うものとする．期待値

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right], \qquad E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2\right]$$

を求めよ．ここで，$\bar{X}$ は X_1，X_2，$\cdots$，X_n の標本平均である．

（解） 期待値の線形性より

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E[(X_k-\mu)^2] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

である．第 8 回より不偏分散

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$$

の期待値 $E[U^2]$ は $E[U^2]=\sigma^2$ であるから，

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2\right] = \frac{n-1}{n}\,E[U^2] = \frac{(n-1)\,\sigma^2}{n}$$

となる．■