確率統計学　解答例

2015.06.16

■　確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 の同一の分布に従うものとする．$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ をみたす定数 w_1，w_2，$\cdots$，w_n を用いて，確率変数 $\hat{\theta}$ を

$$\hat{\theta} = \sum_{k=1}^{n} w_k \, X_k$$

により定義するとき，(1) $E[\hat{\theta}] = \mu$ であり，(2) $V[\hat{\theta}]$ は $\hat{\theta} = \bar{X}$，つまり，$w_k = 1/n$ （$k = 1$，2，$\cdots$，n）のとき最小となることを示せ．

（解） (1) 期待値の線形性より

$$E[\hat{\theta}] = \sum_{k=1}^{n} w_k \, E[X_k] = \mu \sum_{k=1}^{n} w_k = \mu$$

である．(2)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(w_k - \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k + \frac{1}{n^2} \cdot n = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 - \frac{1}{n}$$

となることに注意したい．確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n は互いに独立であるから，

$$V[\hat{\theta}] = \sum_{k=1}^{n} w_k^2 \, V[X_k] = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} w_k^2 = \sigma^2 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(w_k - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \right\}$$

より $w_k = 1/n$ （$k = 1$，2，$\cdots$，n）のとき最小となる．■