# 確率統計学　解答例

2015.06.09

■　確率変数 $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ は互いに独立で，期待値 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の同一の確率分布に従うものとし，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

とおく．このとき，$E[\bar{X}]$，$V[\bar{X}]$ および $E[U^2]$ を求めよ．

**(解)**　独立性より

$$E[X_k\,X_\ell] = \begin{cases} E[X_k]\,E[X_\ell] = \mu^2 & (k \neq \ell) \\ V[X_k] + \{E[X_k]\}^2 = \sigma^2 + \mu^2 & (k = \ell) \end{cases}$$

であることに注意したい．期待値の線形性により

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} E[X_k] = \frac{1}{n}\cdot(n\cdot\mu) = \mu$$

となる．独立性により

$$V[\bar{X}] = \left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{n} V[X_k] = \frac{1}{n^2}\cdot(n\cdot\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

である．

$$\begin{aligned} E[\bar{X}^2] =& \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] + \sum_{k\neq\ell} E[X_k\,X_\ell]\right\} \\ =& \frac{1}{n^2}\cdot\left\{n\,(\sigma^2+\mu^2) + n\,(n-1)\,\mu^2\right\} = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} E[U^2] =& \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n} E[(X_k-\bar{X})^2] = \frac{1}{n-1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] - 2\,E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\,\bar{X}\right] + \sum_{k=1}^{n} E[\bar{X}^2]\right) \\ =& \frac{1}{n-1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] - n\,E[\bar{X}^2]\right) = \frac{1}{n-1}\cdot\left\{n\,(\sigma^2+\mu^2) - n\,\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\} = \sigma^2 \end{aligned}$$

が得られる．■