確率統計学　解答例

2015.06.02

■　確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n が互いに独立であるとき，期待値 $E[X_\ell\, X_k]$ （$1 \leq \ell,\ k \leq n$）および

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]$$

を簡単にせよ．

（解） 確率変数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n の同時確率密度関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とし，確率変数 X_k （$1 \leq k \leq n$）の周辺確率密度関数を $f_{X_k}(x_k)$ とすると，独立性により

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j)$$

が成り立つ．確率変数 X の分散 $V[X]$ は $V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2$ と表されることに注意すると，$\ell = k$ のときには，$E[X_\ell\, X_k] = E[X_k^2] = V[X_k] + \{E[X_k]\}^2$ である．また，$\ell \neq k$ のときには，独立性により

$$\begin{aligned}
E[X_\ell\, X_k] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x_\ell\, x_k\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x_\ell\, x_k \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_\ell\, f_{X_\ell}(x_\ell)\, dx_\ell\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_k\, f_{X_k}(x_k)\, dx_k\right)\left(\prod_{j \neq \ell, k} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_j}(x_j)\, dx_j\right) \\
&= E[X_\ell]\, E[X_k] \prod_{j \neq \ell, k} 1 = E[X_\ell]\, E[X_k]
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$E[X_\ell\, X_k] = \begin{cases} V[X_k] + \{E[X_k]\}^2 & (\ell = k) \\ E[X_\ell]\, E[X_k] & (\ell \neq k) \end{cases}$$

である．また，

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] &= \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell \neq k} E[X_\ell\, X_k] = \sum_{k=1}^{n} (V[X_k] + \{E[X_k]\}^2) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell \neq k} E[X_\ell]\, E[X_k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} V[X_k] + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} E[X_\ell]\, E[X_k] = \sum_{k=1}^{n} V[X_k] + \left(\sum_{k=1}^{n} E[X_k]\right)^2
\end{aligned}$$

が得られる．■