確率統計学　解答例

2015.05.12

■ A を 2×2 実対称行列，λ_1，λ_2 を A の固有値とし，$\lambda_1 < \lambda_1$ とする．また，ベクトルの大きさ $\|\,\mathbf{u}\,\|$ を $\|\,\mathbf{u}\,\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ により定義し，$\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ をそれぞれ λ_1，λ_2 の対応する A の正規化した（$\|\,\mathbf{u}_1\,\| = 1$，$\|\,\mathbf{u}_2\,\| = 1$ をみたす）固有ベクトルとする．$P = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)$ とおくとき，(1) $P\,P^T = E = P^T\,P$ であることを示し，(2) $P^T\,A\,P$ を求めよ．

(解) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ と $A = A^T$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 =& (\lambda_1\,\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\cdot(\lambda_2\,\mathbf{u}_2) = (A\,\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\cdot(A\,\mathbf{u}_2)\\
=& \mathbf{u}_1\cdot(A^T\,\mathbf{u}_2) - \mathbf{u}_1\cdot(A\,\mathbf{u}_2) = 0
\end{aligned}
$$

となるので，$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 = 0$ が成り立つ，つまり，$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は直交することに注意したい．このとき，

$$
P^T\,P = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\end{pmatrix}(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^T\,\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^T\,\mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_2^T\,\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^T\,\mathbf{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E
$$

である．また，任意の 2 次元ベクトル $\mathbf{x}$ は，$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は一次独立であるから，ある実数 α_1，α_2 を用いて $\mathbf{x} = \alpha_1\,\mathbf{u}_1 + \alpha_2\,\mathbf{u}_2$ と表せ，

$$
P^T\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\mathbf{u}_1 + \alpha_2\,\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^T\,(\alpha_1\,\mathbf{u}_1 + \alpha_2\,\mathbf{u}_2)\\ \mathbf{u}_2^T\,(\alpha_1\,\mathbf{u}_1 + \alpha_2\,\mathbf{u}_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}
$$

となるので，

$$
P\,P^T\,\mathbf{x} = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha_1\,\mathbf{u}_1 + \alpha_2\,\mathbf{u}_2 = \mathbf{x}
$$

が得られる．したがって，$P^T\,P = E$ である．

(2) $P^T\,P = E$ であるから，

$$
\begin{aligned}
P^T\,AP =& P^T\,A\,(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2) = P^T\,(A\,\mathbf{u}_1\ A\,\mathbf{u}_2) = P^T\,(\lambda_1\,\mathbf{u}_1\ \lambda_2\,\mathbf{u}_2)\\
=& P^T\,(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = P^T\,P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．■