確率統計学　解答例

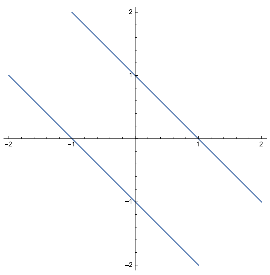
2015.04.28

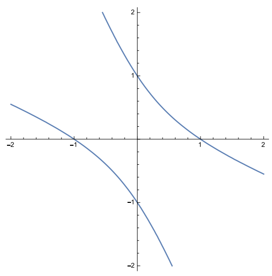
■　二次形式 (1) $a^2 + 2\,a\,b + b^2 = 1$，(2) $a^2 + 3\,a\,b + b^2 = 1$，(3) $a^2 + a\,b + b^2 = 1$ が表す図形をそれぞれ ab 平面に図示せよ．

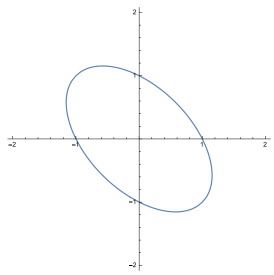
(解)　変数変換（原点を中心とする角度 $-\pi/4$ の回転変換）

$$x = \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-a+b}{\sqrt{2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

を用いる．このとき，$x^2 - y^2 = 2\,a\,b$ であることに注意したい．


(1) のグラフ


(2) のグラフ


(3) のグラフ

二次形式 (1)，(2) および (3) はそれぞれ

$$\begin{aligned} 1 =& a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a+b)^2 = 2\,x^2, \\ 1 =& a^2 + 3\,a\,b + b^2 = (a+b)^2 + a\,b = 2\,x^2 + \frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{x^2}{2/5} - \frac{y^2}{2}, \\ 1 =& a^2 + a\,b + b^2 = (a+b)^2 - a\,b = 2\,x^2 - \frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{x^2}{2/3} + \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

と表され，上記の xy 平面上の図形を原点の周りに角度 $\pi/4$ 回転したものである．■