確率統計学概論　解答例

2016.02.08

■　n を 0 以上の整数とする．動点 P は正四面体 OABC の頂点の上を，以下の条件 (i)，(ii) をみたしながら移動する．

(i) 時刻 $t = 0$ において，動点 P は頂点 O にいる．

(ii) 時刻 $t = n+1$ において，動点 P は時刻 $t = n$ のときにいた頂点から他の 3 つの頂点のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．

このとき，時刻 $t = n$ において動点 P が頂点 A にいる確率を求めよ．

（解） 時刻 $t = n$ において動点 P が頂点 A，O，B，C にいる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とおく．動点 P は各時刻頂点 A，O，B，C のいずれかにいるので，0 以上の各整数 n に対して $p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ が成り立つ．したがって，数列 $\{\, p_n \,\}$ は $p_0 = 0$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot q_n + \frac{1}{3} \cdot r_n + \frac{1}{3} \cdot s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot p_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

をみたすので，

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot p_n \right) - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3} \right) \left(p_{n-1} - \frac{1}{4} \right) = \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \left(p_{n-2} - \frac{1}{4} \right) = \cdots \\ &= \left(-\frac{1}{3} \right)^n \left(p_0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{4 \cdot 3^n}, \qquad \text{つまり，} \quad p_n = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

となる．■