確率統計学概論　解答例

2016.02.01

■　実数 a，b と確率変数 X，Y に対して，期待値 $E[a\,X + b\,Y]$ の別表現を与えよ．また，確率変数 X と Y が互いに独立であるとき，期待値 $E[X\,Y]$ の別表現を与えよ．

（解） (X, Y) の同時確率密度関数を $f(x, y)$，X と Y の周辺確率密度関数をそれぞれ $f_X(x)$，$f_Y(y)$ と表す．このとき，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

であることに注意すると，積分の順序交換により

$$\begin{aligned}
E[a\,X + b\,Y] =& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (a\,x + b\,y)\,f(x, y)\,dx\,dy \\
=& a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x, y)\,dx\,dy + b\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(x, y)\,dx\,dy \\
=& a\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy\right)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\right)dy \\
=& a\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy = a\,E[X] + b\,E[Y]
\end{aligned}$$

が得られる．また，X と Y が互いに独立であるときには $f(x, y) = f_X(x)\,f_Y(y)$ と表せるので，

$$\begin{aligned}
E[X\,Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\ f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f_X(x)\,f_Y(y)\,dx\,dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy\right) = E[X]\,E[Y]
\end{aligned}$$

となる．■