

確率統計学概論 解答例

2016.01.25

■ $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$ とし, 確率変数 X が $B(n, p)$ に従うとき, 期待値 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ.

(解) 二項定理より, 積率母関数 $m_X(t) = E[e^{tX}]$ は

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{k=0}^n \{e^{tk} P(X=k)\} = \sum_{k=0}^n \{e^{tk} {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}\} \\ &= \sum_{k=0}^n \{{}_n C_k (e^t p)^k (1-p)^{n-k}\} = \{e^t p + (1-p)\}^n \end{aligned}$$

となり, $m_X(t)$ を t に関して微分すると

$$\begin{aligned} m'_X(t) &= n(e^t p + 1-p)^{n-1} e^t p, \\ m''_X(t) &= n(n-1)(e^t p + 1-p)^{n-2} (e^t p)^2 + n(e^t p + 1-p)^{n-1} e^t p \end{aligned}$$

となるので, $E[X] = m'_X(0) = np$, $E[X^2] = n(n-1)p^2 + np$ が得られる. また,

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \{n(n-1)p^2 + np\} - (np)^2 = np(1-p)$$

である. ■