確率統計学概論　解答例

2015.12.21

■　任意に固定された実数 t に対して，極限

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi\,n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}\right\}$$

を求めよ．

(解) 第 7 回の小テストにより

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+1)/2)}{n\,\Gamma(n/2)},\qquad I_{n+2}=\frac{n}{n+2}\,I_n,\qquad n\in\mathbb{N}$$

を示している．また，すべての $x\in[0,\pi/2]$ に対して $0\le\sin x\le 1$ であるから，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して，$0<I_{n+1}\le I_n$ が成り立ち，はさみうちの原理と

$$1\le\frac{I_n}{I_{n+1}}\le\frac{n+2}{n}\cdot\frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}\le\frac{n+2}{n}\cdot 1=\frac{n+2}{n}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}=1$$

である．また，

$$\frac{I_n}{I_{n+1}}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+1)/2)}{n\,\Gamma(n/2)}\cdot\frac{(n+1)\,\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n+2)/2)}=\frac{2\,(n+1)}{n}\cdot\frac{\Gamma((n+1)/2)^2}{n\,\Gamma(n/2)^2}$$

より，$t=0$ のときの極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi\,n}\,\Gamma(n/2)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2\,\pi\,(n+1)}\cdot\frac{I_n}{I_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}$$

が得られる．$t\ne 0$ のときには

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi\,n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi\,n}\,\Gamma(n/2)}\cdot\left\{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{n/t^2}\right\}^{-t^2/2}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-1/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\cdot e^{-t^2/2}\cdot 1=\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\,\pi}}\end{aligned}$$

となる．■