確率統計学概論　解答例

2015.12.14

■　Ω を

$$P(B_k) > 0 \quad (k \in K), \qquad B_k \cap B_\ell = \varnothing \quad (k, \ell \in K, k \neq \ell), \qquad \Omega = \bigcup_{k \in K} B_k$$

をみたすように $\mathcal{F}$ に含まれる事象 $\{ B_k \}_{k \in K}$ （$K \subset \mathbb{N}$）で分割する．このとき，$P(A) > 0$ をみたす任意の事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$P(B_j | A) = \frac{P(A|B_j)\, P(B_j)}{\sum_{k \in K} P(A|B_k)\, P(B_k)}, \qquad j \in K$$

が成り立つことを示せ．

(解)　任意の k，$\ell \in K$ （$k \neq \ell$）に対して

$$(A \cap B_k) \cap (A \cap B_\ell) = A \cap (B_k \cap B_\ell) = \varnothing$$

となるので，$\{ A \cap B_k \}_{k \in K}$ は互いに排反である．確率測度の σ 加法性と

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) = \bigcup_{k \in K} (A \cap B_k)$$

により

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k \in K} (A \cap B_k) \right) = \sum_{k \in K} P(A \cap B_k) = \sum_{k \in K} P(A|B_k)\, P(B_k)$$

が得られるので，各 $j \in K$ に対して

$$P(B_j | A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)\, P(B_j)}{\sum_{k \in K} P(A|B_k)\, P(B_k)}$$

が成り立つ．■