確率統計学概論　解答例

2015.12.07

■　r （$r \neq 0$）を実数とする．

$$S = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot r^k), \qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

を求めよ．

（解） 等比数列の和の公式より

$$g(r) = \sum_{k=1}^{n} r^k = r \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}$$

であるから，r に関して微分すると

$$g'(r) = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot r^{k-1}) = \frac{\{1 - (n+1)\, r^n\} \cdot (1 - r) - (r - r^{n+1}) \cdot (-1)}{(1 - r)^2} = \frac{1 - (n+1)\, r^n + n\, r^{n+1}}{(1 - r)^2}$$

が得られる．したがって，

$$S = r \sum_{k=1}^{n} (k \cdot r^{k-1}) = \frac{r\, \{1 - (n+1)\, r^n + n\, r^{n+1}\}}{(1 - r)^2}$$

である．変数変換 $t = \pi/2 - x$ により

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin(\pi/2 - t)}{\sin(\pi/2 - t) + \cos(\pi/2 - t)} \cdot (-1)\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\, dt$$

となるので，

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dt \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

である．■