確率統計学概論　解答例

2015.11.25

■　自然数 n は $n \geq 5$ をみたすものとする．n 本中当たりが 2 本，はずれが $(n-2)$ 本含まれたクジがある．このクジを順番に 1 本ずつ引いていき，引いたクジは元に戻さないとする．このとき，k （$1 \leq k \leq n$）番目に引いた人が当たる確率を求めよ．

（解） k 番目の人が当たるためには，当たりくじが (a) 2 本または (b) 1 本残っていなければならない．(a) の場合には，1 番目から $(k-1)$ 番目の人がすべてはずれクジを引いていることになる．$k = n$ のときには，残っているクジは 1 本であるからこの場合は起こらず，確率は 0 である．$1 \leq k < n$ のときには

$$\frac{{}_{n-2}P_{k-1} \cdot {}_2P_1}{{}_nP_k}$$

となる．(b) の場合には, 1 番目から $(k-1)$ 番目にクジを引いた人の中で 1 人のみ当たりクジを引いていることになる．$k = 1$ のときには，当たりクジは 2 本あるからこの場合は起こらず，確率は 0 である．$1 < k \leq n$ のときには

$$(k-1) \cdot \frac{{}_{n-2}P_{k-2} \cdot {}_2P_2}{{}_nP_k}$$

となる．したがって，(i) $k = 1$ のときの確率は

$$\frac{{}_{n-2}P_0 \cdot {}_2P_1}{{}_nP_1} + 0 = \frac{1 \cdot 2}{n} = \frac{2}{n},$$

(ii) $1 < k < n$ のときの確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{{}_{n-2}P_{k-1} \cdot {}_2P_1}{{}_nP_k} + (k-1) \cdot \frac{{}_{n-2}P_{k-2} \cdot {}_2P_2}{{}_nP_k} \\
&\quad = \frac{2 \cdot (n-k)!}{n!} \left[\frac{(n-2)!}{\{(n-2)-(k-1)\}!} + \frac{(k-1) \cdot (n-2)!}{\{(n-2)-(k-2)\}!} \right] \\
&\quad = \frac{2 \cdot (n-2)!}{n!} \left[\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} + \frac{(k-1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} \right] = \frac{2}{n \cdot (n-1)} \left[(n-k) + (k-1) \right] = \frac{2}{n},
\end{aligned}$$

(iii) $k = n$ のときの確率は

$$0 + (n-1) \cdot \frac{{}_{n-2}P_{n-2} \cdot {}_2P_2}{{}_nP_n} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)! \cdot 2}{n!} = \frac{2}{n}$$

である．■