確率統計学概論　解答例

2015.11.09

■　二項係数 ${}_nC_k$ について，次の問いに答えよ．

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$，$k \in \mathbb{Z}$ （$0 \leq k < n$）に対して ${}_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$，$k \in \mathbb{Z}$ （$0 \leq k \leq n$）に対して

$$ {}_{n+1}C_{k+1} = {}_kC_k + {}_{k+1}C_k + \cdots + {}_nC_k $$

が成り立つことを示せ．

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$，$k \in \mathbb{Z}$ （$0 \leq k \leq n$）に対して ${}_nC_k$ は自然数であることを示せ．

（解） (1) 二項係数の定義より

$$ \begin{aligned} {}_{n+1}C_{k+1} &= \frac{(n+1)\cdot n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{\{(k+1)+(n-k)\}\cdot n!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,\{n-(k+1)\}!} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1} \end{aligned} $$

となる．(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して ${}_nC_n = 1$ であることに注意して，(1) を帰納的に用いると

$$ \begin{aligned} {}_{n+1}C_{k+1} &= {}_nC_{k+1} + {}_nC_k = ({}_{n-1}C_{k+1} + {}_{n-1}C_k) + {}_nC_k \\ &= ({}_{n-2}C_{k+1} + {}_{n-2}C_k) + {}_{n-1}C_k + {}_nC_k = \cdots \\ &= {}_{k+1}C_{k+1} + {}_{k+1}C_k + \cdots + {}_{n-2}C_k + {}_{n-1}C_k + {}_nC_k \\ &= {}_kC_k + {}_{k+1}C_k + \cdots + {}_{n-2}C_k + {}_{n-1}C_k + {}_nC_k \end{aligned} $$

である．(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，命題

(P) $0 \leq k \leq n$ をみたすすべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して ${}_nC_k$ は自然数である

が成り立つことを示す．(i) ${}_1C_0 = 1$，${}_1C_1 = 1$ より，$n = 1$ のとき，命題 (P) が成り立つ．$n = \ell$ のとき，命題 (P) が成り立つと仮定する．二項係数の定義より ${}_{\ell+1}C_0 = 1$，${}_{\ell+1}C_{\ell+1} = 1$ である．また，自然数 k （$1 \leq k \leq \ell$）のとき，仮定と ${}_{\ell+1}C_k = {}_\ell C_{k-1} + {}_\ell C_k$ より ${}_{\ell+1}C_k$ は自然数である．したがって，$n = \ell + 1$ のときも，命題 (P) が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して命題 (P) が成り立つ．■