確率統計学概論　解答例

2015.11.02

■　k を非負の自然数，λ を正数とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\left\{{}_nC_k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right\}$$

を求めよ．

(解)　ネイピアの数の定義より

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

が成り立つことに注意したい．$x=(n-\lambda)/\lambda$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $x\to+\infty$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}&=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{\lambda x+\lambda-k}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\lambda x-\lambda+k}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{-\lambda}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{k-\lambda}\right]=e^{-\lambda}\cdot 1^{k-\lambda}=e^{-\lambda}\end{aligned}$$

が得られるので，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left\{{}_nC_k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right\}\\&\quad=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\end{aligned}$$

となる．■