確率統計学概論　解答例

2015.10.13

■　n を自然数とする．赤色，黄色，青色のおはじきがたくさんあり，その中から n 個取り出して，横一列に並べる．次の条件をみたす並べ方は何と通りあるか調べよ．

(1) 赤色のおはじきの右隣には赤色のおはじきは置かない．
(2) 黄色のおはじきの右隣には青色のおはじきを置く．
(3) 青色のおはじきの右隣には赤色のおはじきを置く．
(4) 左端には赤色のおはじきを置く．

(解)　各自然数 k に対して，条件 (1)，(2)，(3)，(4) をみたすように k 個のおはじきを並べたときの並べ方を a_k 通りとする．k 個のおはじきについて，左から

$$\text{赤色 黄色 青色 }\underbrace{\text{赤色 }\cdots\cdots}_{(n-3)\text{ 個}}\quad \text{のタイプの並べ方は}\quad a_{n-3}\text{ 通り，}$$

$$\text{赤色 青色 }\underbrace{\text{赤色 }\cdots\cdots}_{(n-2)\text{ 個}}\quad \text{のタイプの並べ方は}\quad a_{n-2}\text{ 通り}$$

であるから，数列 $\{a_k\}$ は

$$a_1=1,\qquad a_2=2,\qquad a_3=2,\qquad a_n=a_{n-3}+a_{n-2}\quad (n=4,5,6,\cdots) \tag{1}$$

をみたす．したがって，

$$\begin{aligned}
&a_1=1, && a_2=2, && a_3=2, && a_4=3, && a_5=4,\\
&a_6=5, && a_7=7, && a_8=9, && a_9=12, && a_{10}=16
\end{aligned}$$

である．

3 次方程式 $x^3-x-1=0$ の解を γ_1，γ_2，γ_3 とし，$0\le\arg\gamma_1\le\arg\gamma_2\le\arg\gamma_3\le 2\pi$ をみたすように番号付けを行う．

$$a_n=\sum_{k=1}^{3}\frac{(2\,\gamma_k^2+2\,\gamma_k+1)\,\gamma_k^{n-1}}{2\,\gamma_k+3},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

とおくと，

$$a_n-a_{n-3}-a_{n-2}=\sum_{k=1}^{3}\frac{(2\,\gamma_k^2+2\,\gamma_k+1)\,\gamma_k^{n-4}\,(\gamma_k^3-\gamma_k-1)}{2\,\gamma_k+3}=0,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

である．解と係数の関係により

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0,\qquad \gamma_1\,\gamma_2+\gamma_2\,\gamma_3+\gamma_3\,\gamma_1=-1,\qquad \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3=1$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=&(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)^2-2\,(\gamma_1\,\gamma_2+\gamma_2\,\gamma_3+\gamma_3\,\gamma_1)=2,\\
\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2\,\gamma_k+3}=&\frac{4\,(\gamma_1\,\gamma_2+\gamma_2\,\gamma_3+\gamma_3\,\gamma_1)+12\,(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+27}{8\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3+12\,(\gamma_1\,\gamma_2+\gamma_2\,\gamma_3+\gamma_3\,\gamma_1)+18\,(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+27}=1
\end{aligned}$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{2\,\gamma_k^2 + 2\,\gamma_k + 1}{2\,\gamma_k + 3} = \sum_{k=1}^{3} \left(\gamma_k - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2\,\gamma_k + 3} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cdot 1 = 1, \\
a_2 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{(2\,\gamma_k^2 + 2\,\gamma_k + 1)\,\gamma_k}{2\,\gamma_k + 3} = \sum_{k=1}^{3} \left(\gamma_k^2 - \frac{\gamma_k}{2} + \frac{5}{4} - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{2\,\gamma_k + 3} \right) = 2 + \frac{15}{4} - \frac{15}{4} \cdot 1 = 2, \\
a_3 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{(2\,\gamma_k^2 + 2\,\gamma_k + 1)\,\gamma_k^2}{2\,\gamma_k + 3} = \sum_{k=1}^{3} \left(\gamma_k^3 - \frac{\gamma_k^2}{2} + \frac{5\,\gamma_k}{4} - \frac{15}{8} + \frac{45}{8} \cdot \frac{1}{2\,\gamma_k + 3} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(-\frac{\gamma_k^2}{2} + \frac{9\,\gamma_k}{4} - \frac{7}{8} - \frac{45}{8} \cdot \frac{1}{2\,\gamma_k + 3} \right) = -\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{21}{8} + \frac{45}{8} \cdot 1 = 2
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって，(2) で定義される数列 $\{\, a_n \,\}$ は漸化式 (1) をみたす． ■