

## 確率統計学 解答例

2014.07.22

■ サイコロを 720 回投げるとき、次の確率を求めよ.

- (1) 1 の目が 110 回以上出る確率
- (2) 1 の目が出た回数が 110 回以上 125 回以下である確率

**(解)** 確率変数  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 720$ ) を、 $k$  回目に出た目が 1 であるとき  $X_k = 1$ 、そうでないとき  $X_k = 0$  と定め、 $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  とおく. このとき、 $X_k$  は  $B(1, 1/6)$  のベルヌーイ分布に従うので、

$$\begin{aligned}\mu &= E[X_k] = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \\ \sigma^2 &= V[X_k] = E[X_k^2] - \{E[X_k]\}^2 = \left(0^2 \cdot \frac{5}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}\end{aligned}$$

である. また、 $X_1, X_2, \dots, X_{720}$  は互いに独立であるから、 $n = 720$  を十分に大きな数と考え、中心極限定理を適用すると、

$$Z = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

の分布は標準正規分布  $N(0, 1^2)$  で近似できる. (1) 標準正規分布の数値表より

$$P(Y_{720} \geq 110) = P\left(Z \geq \frac{110 - 720 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{720 \cdot \frac{5}{36}}}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0.841$$

である. (2)  $a \geq 0$  のとき  $P(0 \leq Z \leq a) = P(Z \leq a) - 0.5$  であるから

$$\begin{aligned}P(110 \leq Y_{720} \leq 125) &= P\left(\frac{110 - 720 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{720 \cdot \frac{5}{36}}} \leq Z \leq \frac{125 - 720 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{720 \cdot \frac{5}{36}}}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) = P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= (0.8413 - 0.5) + (0.6915 - 0.5) = 0.533\end{aligned}$$

となる. ■