

確率統計学 解答例

2014.07.15

■ ある高等学校の生徒から無作為に選んだ 10 名の身長は

169.1, 169.0, 164.0, 171.0, 162.5, 167.5, 164.5, 168.4, 167.1, 160.5

であり、母集団分布は正規分布であることが分かっている。母平均 μ が $\mu = 166.0$ である場合について、分散 σ^2 に対する信頼係数 95% の信頼区間を求めよ。また、母平均 μ が未知である場合について、分散 σ^2 に対する信頼係数 95% の信頼区間を求めよ。

(解) 単純な計算により、

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = 1663.6, \quad \sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 276856.78,$$

$$\sum_{k=1}^{10} (x_k - 166)^2 = 101.58, \quad (n-1)u^2 = \sum_{k=1}^{10} (x_k - \bar{x})^2 = 100.28$$

が得られる。正規母集団からの大きさ n の無作為標本に対して

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2, \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

が成り立つことに注意したい。母平均 μ が $\mu = 166.0$ である場合について、信頼係数 95% の σ^2 の信頼区間は

$$3.247 \leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 = \frac{101.58}{\sigma^2} \leq 20.483$$

となる、つまり、 $4.959 \leq \sigma^2 \leq 31.285$ である。また、母平均 μ が未知である場合について、信頼係数 95% の σ^2 の信頼区間は

$$2.700 \leq \frac{(n-1)u^2}{\sigma^2} = \frac{100.28}{\sigma^2} \leq 19.023$$

となる、つまり、 $5.272 \leq \sigma^2 \leq 37.137$ である。 ■