

確率統計学 解答例

2014.05.13

■ 確率変数 X と Y が互いに独立であるとき, (1) 同時確率密度関数 $f(x, y)$ と周辺確率密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ の関係式を示し, (2) $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ を簡単にせよ.

(解) (1) すべての x, y に対して $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ である. (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X]) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx - E[X] \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = E[X] - E[X] \cdot 1 = 0$$

より

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])(Y - E[Y])] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])(y - E[Y]) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])(y - E[Y]) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[Y]) f_Y(y) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X]) f_X(x) dx \right\} dy = 0 \end{aligned}$$

となる. ■