確率統計学　解答例

2014.04.22

■ μ，σ （$\sigma > 0$）を実数とし，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

とおく．有界な連続関数 $g(x)$ に対して

$$\lim_{\sigma\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = g(\mu)$$

を示せ．

(解) ルベーグの収束定理[*1]を用いる．変数変換 $x = \mu + \sigma\,y$ により

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,g(\mu+\sigma\,y)\,dy$$

となる．$g(x)$ は有界であるから，ある定数 $M > 0$ が存在して，すべての y に対して

$$\left|\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,g(\mu+\sigma\,y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,M$$

が成り立ち，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \sqrt{2\,\pi}$ であることに注意すると

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,M\,dy = M < +\infty$$

である．また，$g(x)$ は連続であるから，各 y に対して

$$\lim_{\sigma\to+0}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,g(\mu+\sigma\,y)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,g(\mu)$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to+0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x)\,dx &= \lim_{\sigma\to+0}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,g(\mu+\sigma\,y)\,dy \\ = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\sigma\to+0}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,g(\mu+\sigma\,y)\right\}dy &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,g(\mu)\,dy = g(\mu)\end{aligned}$$

となる．■

[*1] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．可測集合 E 上の可測関数 f_1，f_2，f_3，$\cdots$ が与えられているとする．(i) $|\,f_n(x)\,| \leq g(x)$（$n = 1$，2，$\cdots$）となる可積分関数 g が存在し，(ii) ほとんどいたるところ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$$

が成り立つ．