確率統計学概論　解答例

2014.12.22

■　関数 $f(x)$ を次の分布の確率密度関数とするとき，$\displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ であることを確認せよ．

(1)　自由度 n の χ^2 分布

(2)　自由度 n の t 分布

（解） (1) 変数変換 $x = 2\,t$ により

$$\begin{aligned}\int_{+\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{(2\,t)^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-t}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot 2\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-t}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \Gamma(\tfrac{n}{2}) = 1\end{aligned}$$

となる．(2) (a) $n = 1$ のとき，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\,\left[\tan^{-1} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\,\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 1$$

である．(b) $n \geq 2$ のとき，変数変換 $t = \pi/2 - y$ により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cdot (-1)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} y\,dy = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

であり，すべての $z > 0$ に対して $\Gamma(z) = z\,\Gamma(z)$ が成り立つので，変数変換 $x = \sqrt{n}\,\tan t$ を用いると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (1+\tan^2 t)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 t}\,dt = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t\,dt \\ &= \frac{2\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t\,dt = \frac{2\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} = 1\end{aligned}$$

が得られる．■